



# MEFOP

## SEMINARIO DI SPECIALIZZAZIONE

### IL RISCHIO LONGEVITA' E GLI INVESTITORI PREVIDENZIALI: RIFLESSIONI SULLA OFFERTA LTC

UNIVERSITÀ  
DELLA CALABRIA



ROMA, 20 APRILE 2015



---

*I modelli attuariali per il controllo del longevity risk*

**Massimiliano Menzietti**  
**Università della Calabria**  
**Associazione Consulenza Ricerca Attuariale**

# INDICE

---

- ▶ Trend demografici e longevity risk
- ▶ La rappresentazione del longevity risk: modelli stocastici di proiezione della mortalità
- ▶ Misure del rischio di longevità
- ▶ La tariffazione e prodotti di rendita vitalizia
- ▶ I survivor swaps

# TREND DEMOGRAFICI E LONGEVITY RISK

---



- Cambiamento strutturale della popolazione



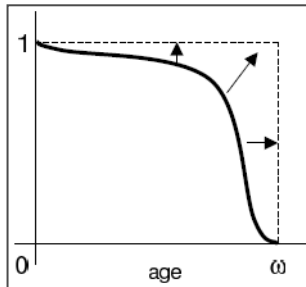
- Aumento del peso degli anziani sulla popolazione
  - *Aumento speranza di vita*
  - *Diminuzione natalità*



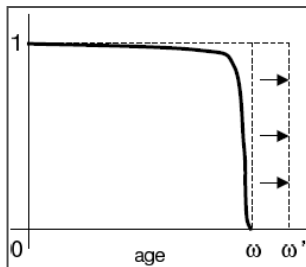
- Aumento progressivo della speranza di vita
- Incremento del numero degli esposti al rischio di sopravvivenza
- Incertezza

# L'ESPERIENZA DI MORTALITÀ NELL'ULTIMO SECOLO

- ▶ Negli ultimi decenni l'evoluzione della mortalità ha comportato una consistente diminuzione dei decessi alle età adulte ed anziane → aumento della vita media
- ▶ Conseguente impatto sulla forma della curva dei sopravvivenenti



Rettangolarizzazione della curva dovuta ad una concentrazione dei decessi intorno alla moda ad età avanzate

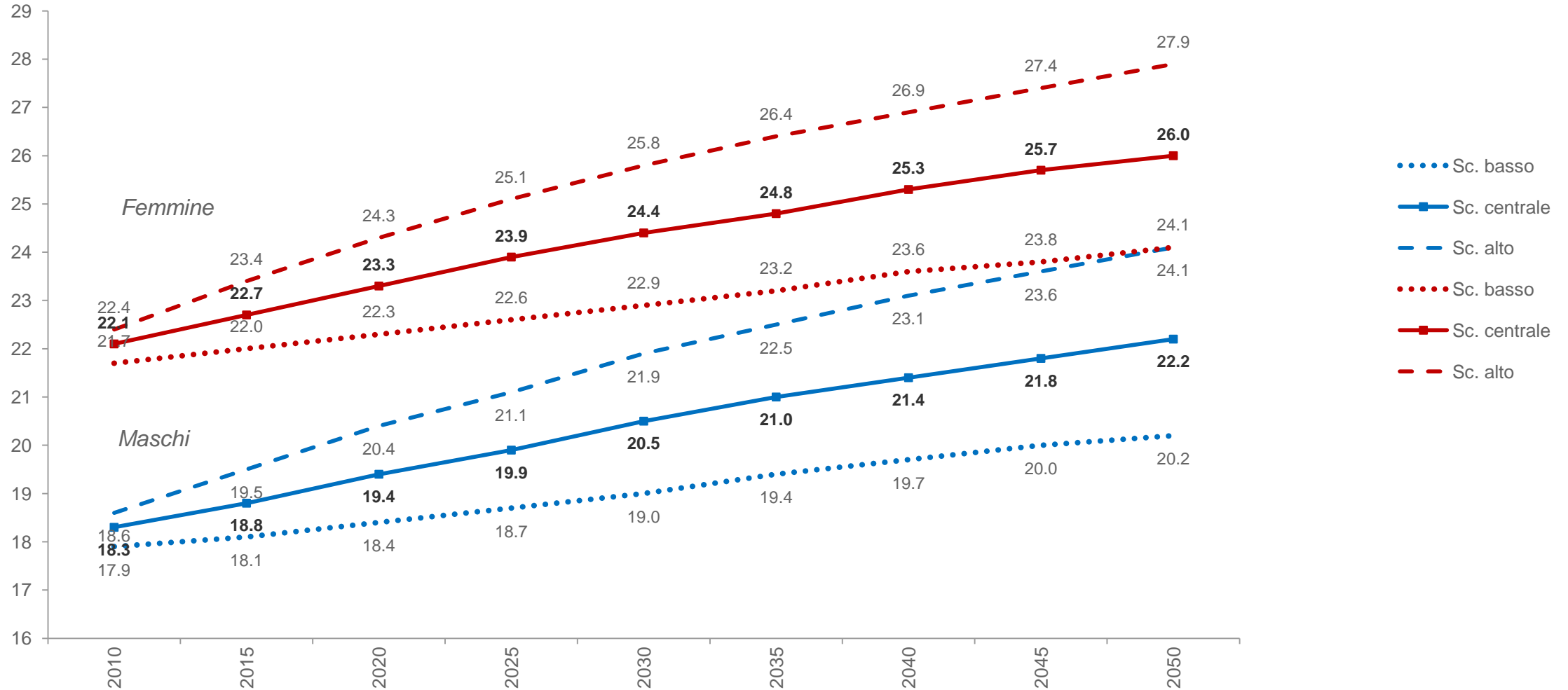


Curva dei decessi: spostamento del punto di Lexis (moda) verso le età estreme → espansione della funzione di sopravvivenza

# TREND DEMOGRAFICI E LONGEVITY RISK

## SPERANZA DI VITA A 65 ANNI

Previsioni popolazione, ISTAT 2010-2050 (scenario basso, centrale, alto)



# LONGEVITY RISK: CONSEGUENZE

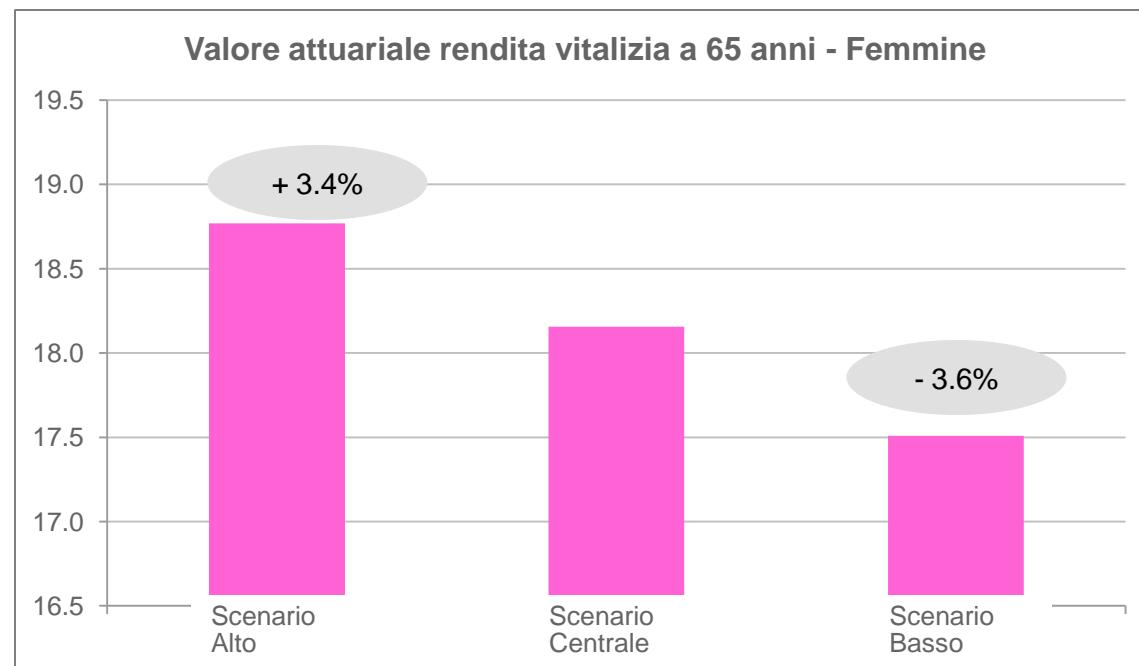
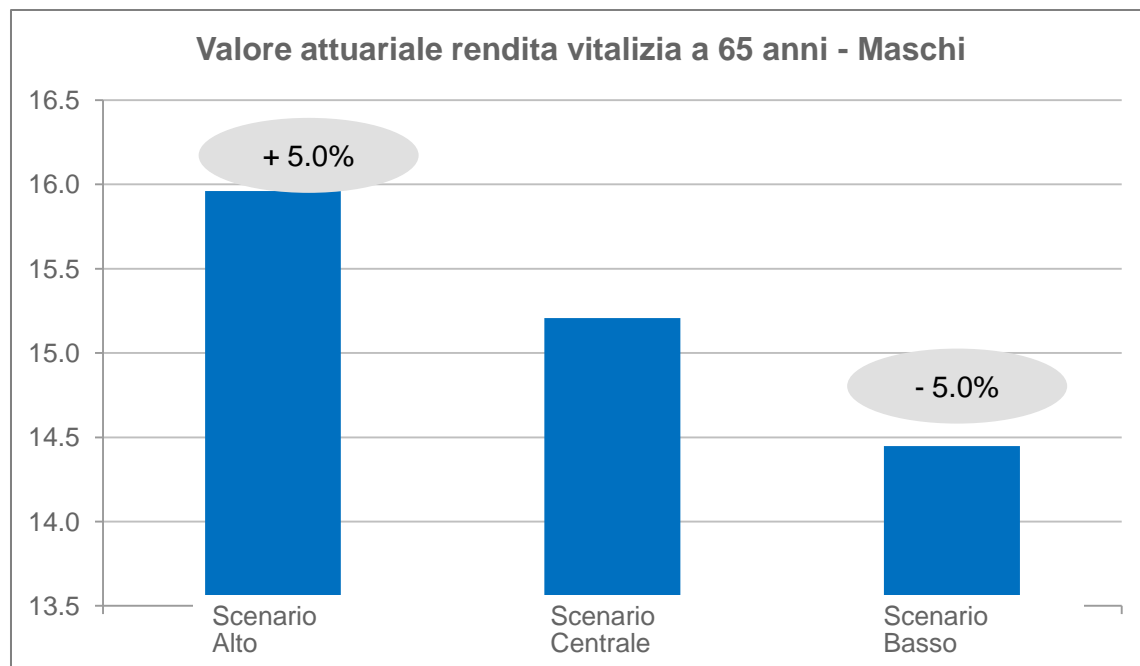
---

- ▶ Influenza fortemente enti previdenziali, casse di previdenza, fondi pensione e prodotti assicurativi di rendita
  - Estensione del periodo di pagamento della rendita e conseguente incremento della passività attuariali
  - E' presente nella fase di accumulo nei fondi a prestazione definita
  - E' presente nella fase di decumulo (erogazione della rendita) nei fondi a contribuzione definita
- ▶ In passato le proiezioni della mortalità hanno **sottostimato la tendenza all'aumento della longevità** della popolazione
- ▶ Necessità di adottare **tavole proiettate** di mortalità per il calcolo dei valori attuariali delle rendite
  - Da tavole di mortalità statiche basate su un solo anno di calendario a tavole dinamiche che incorporano la proiezione della mortalità

# IMPATTO DEL LONGEVITY RISK SUL VALORE DELLE RENDITE

## ► Principali conseguenze sui soggetti erogatori di rendita:

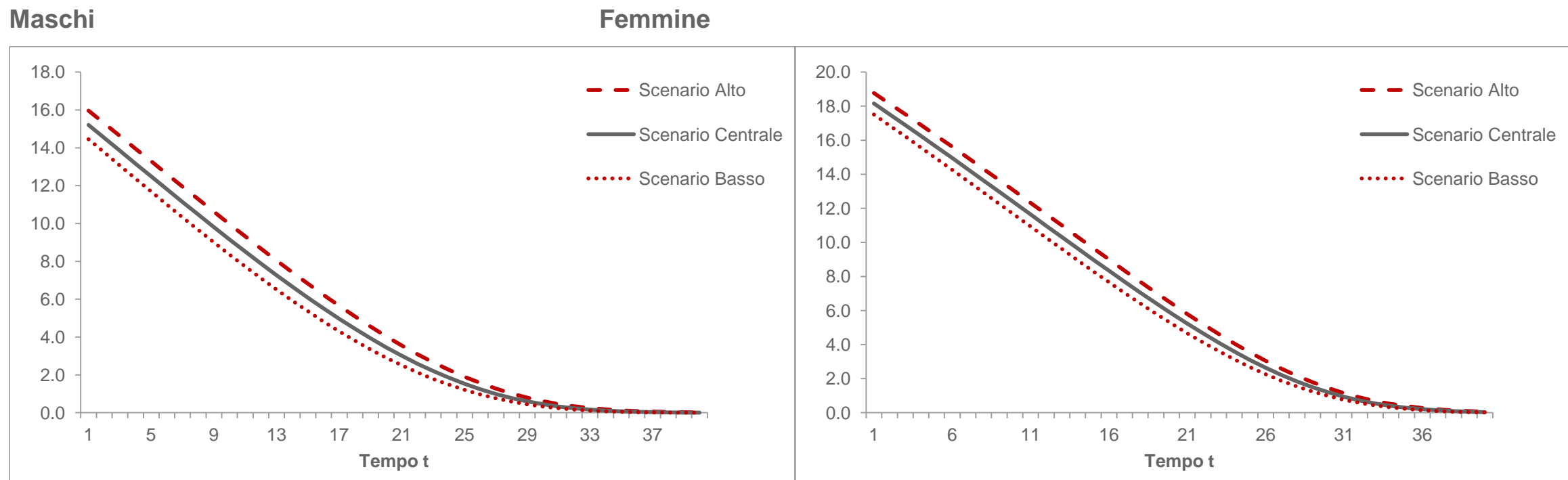
- Estensione del periodo di pagamento della rendita
- Incremento della passività attuariali per effetto della diminuzione delle probabilità di morte



Elaborazione dell'autore

# IMPATTO DEL LONGEVITY RISK SUL VALORE DELLA RISERVA

- Tasso atteso di riserva in  $t = [1, 40]$ 
  - Generazione nata nel 1942 (65 anni nel 2007)
  - Probabilità di sopravvivenza calcolate con il modello Lee-Carter

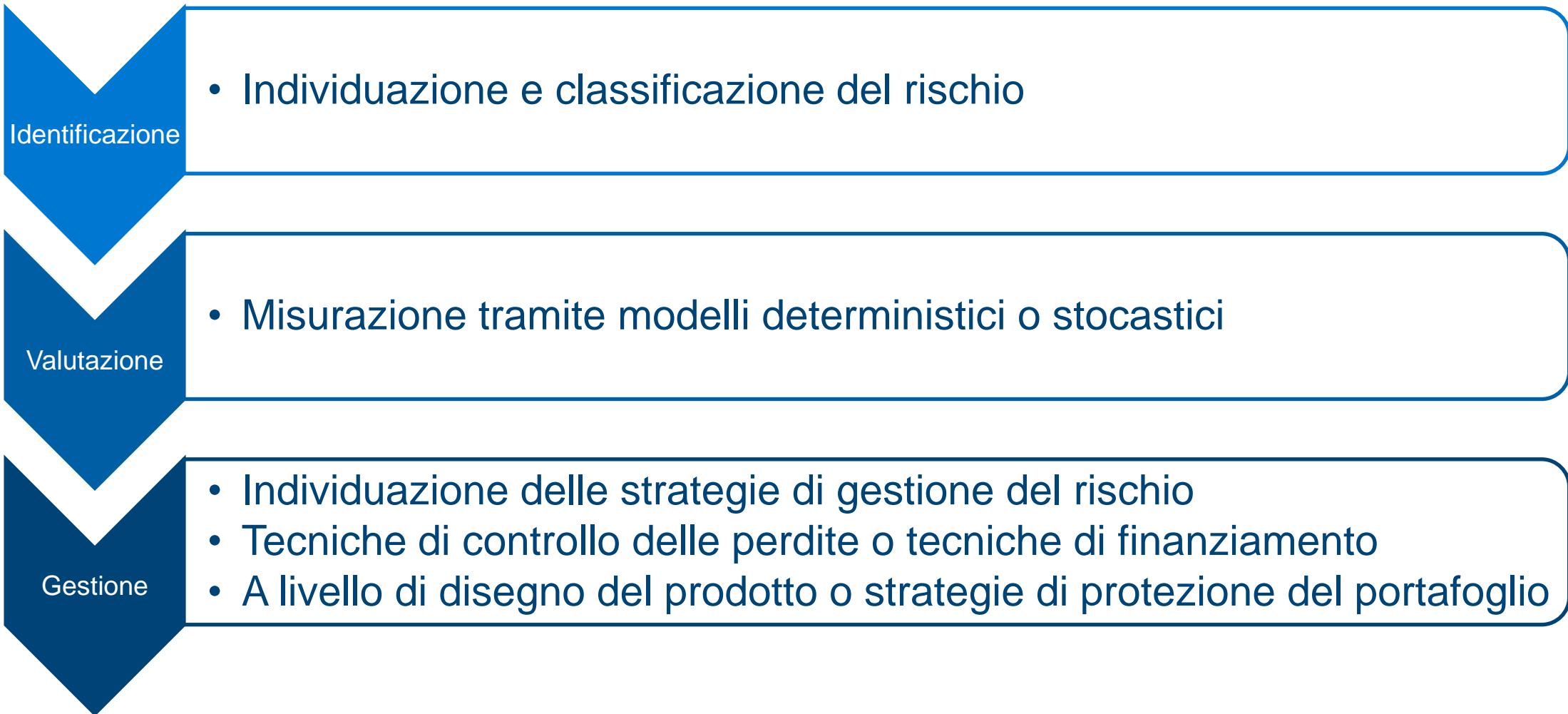


Elaborazione dell'autore



# IL PROCESSO DI RISK MANAGEMENT

---



# RAPPRESENTARE IL LONGEVITY RISK

---

- ▶ Trend decrescenti della mortalità impongono l'adozione di **tavole proiettate** di mortalità per calcolare i valori attuariali delle rendite
- ▶ Utilizzo di proiezioni stocastiche per quantificare esplicitamente l'incertezza della mortalità proiettata
- ▶ Necessità di formulare differenti ipotesi sull'evoluzione della mortalità → scelta di un insieme di significativi **scenari di mortalità** (tavole di mortalità)
- ▶ **Due diversi approcci** nella costruzione di scenari futuri:
  - deterministico (singolo scenario)
  - stocastico (multi - scenario)

# TAVOLE DI MORTALITÀ PROIETTATE

- Utilizzo di un approccio dinamico allo studio della mortalità: mortalità come funzione sia dell'età che dell'anno di calendario
- Una tavola di mortalità proiettata è ottenuta sulla base di procedure statistiche di stima dei tassi di mortalità osservati

		età	Passato	Anno base proiezione	Futuro	
anno di calendario			$t - 1$	$t$	$t + 1$	
	Coorte	...	$t - 1$	$t$	$t + 1$	...
	0	...	$q_0(t - 1)$	$q_0(t)$	$q_0(t + 1)$	...
	1	...	$q_1(t - 1)$	$q_1(t)$	$q_1(t + 1)$	...
	...	...	...	...	...	...
	$x$	...	$q_x(t - 1)$	$q_x(t)$	$q_x(t + 1)$	...
	$x + 1$	...	$q_{x+1}(t - 1)$	$q_{x+1}(t)$	$q_{x+1}(t + 1)$	...
	...	...	...	...	...	...
	$\omega - 1$	...	$q_{\omega-1}(t - 1)$	$q_{\omega-1}(t)$	$q_{\omega-1}(t + 1)$	...

# APPROCCIO DETERMINISTICO

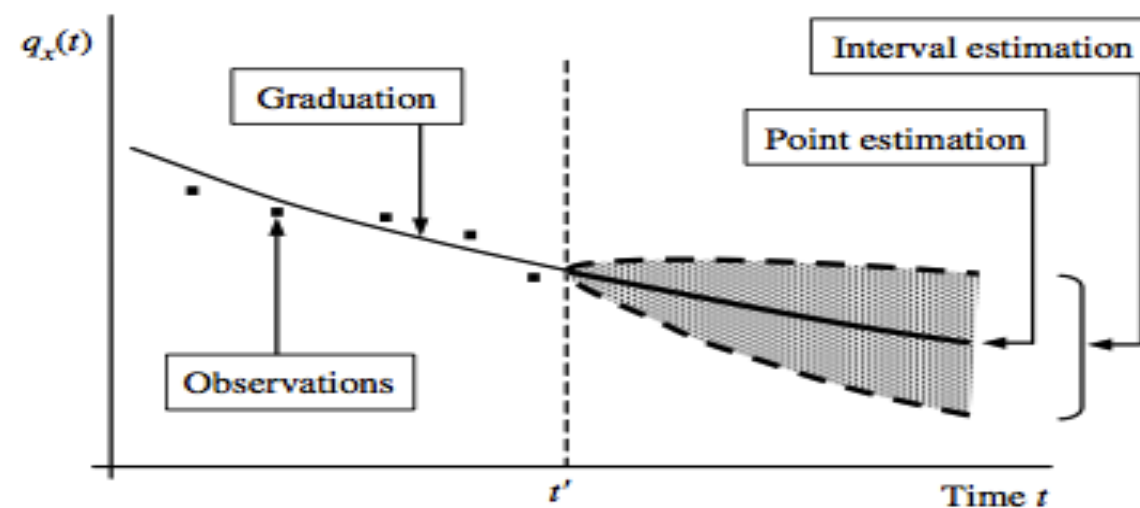
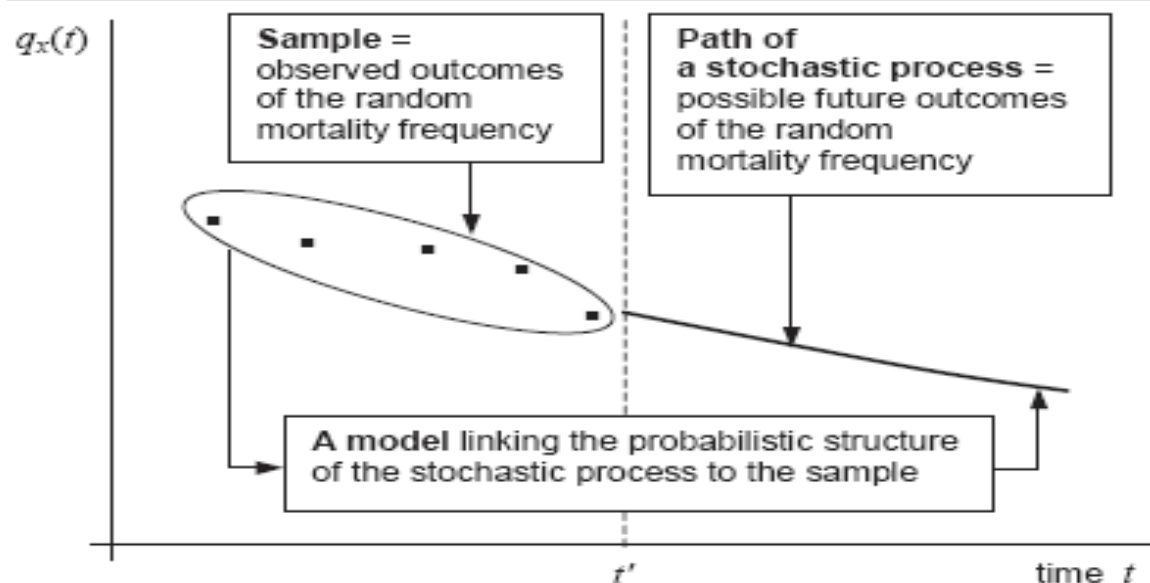
---

- ▶ Consente ai soggetti che erogano le rendite di valutare esclusivamente **il rischio di fluttuazioni casuali** della mortalità intorno ai valori attesi
- ▶ **Scelta di scenari “medi”** (riduzione media della mortalità) **e di scenari “estremi”** (riduzione molto elevata o molto bassa della mortalità)
- ▶ **Scenario testing:** analisi di sensitività delle principali variabili attuariali in funzione dei trend futuri di mortalità

# MODELLI ESTRAPOLATIVI

## Modelli estrapolativi stocastici

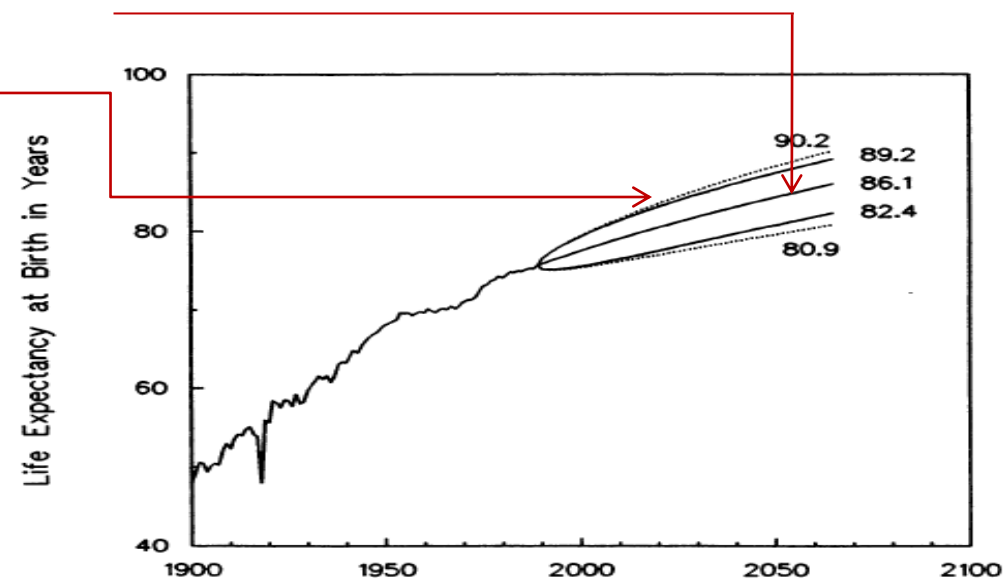
- I tassi di mortalità osservati sono estrazioni di variabili casuali che rappresentano la mortalità passata
- I tassi di mortalità proiettati sono stime di variabili casuali che rappresentano la mortalità futura
- Si definiscono un insieme di ipotesi circa la mortalità e un legame tra osservazioni e proiezioni



► Fonte: Pitacco E., Denuit M., Haberman S., Olivieri A. (2009) "Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business". Oxford University Press.

# APPROCCIO STOCASTICO

- ▶ Per modellizzare e misurare il longevity risk necessario un **modello stocastico di proiezione della mortalità**
  - quantifica esplicitamente l'incertezza della proiezione
- ▶ Risultati della proiezione con un modello stocastico:
  - **stime puntuali** dei tassi futuri di mortalità
  - **intervalli di confidenza**



# IL MODELLO LEE–CARTER (1992)

- I tassi centrali di mortalità hanno una forma log-bilineare:

$$\ln m_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{x,t} \quad \text{dove:} \quad \widehat{m}_x(t) = \frac{D_{xt}}{ETR_{xt}} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Decessi} \\ \longrightarrow \text{Esposti al rischio} \end{array}$$

- $\alpha_x$  descrive il comportamento della mortalità al variare dell'età
- $\beta_x$  descrive per ogni età come la mortalità reagisce al variare di  $\kappa_t$
- $\kappa_t$  indice della variazione della mortalità nel tempo
- $\epsilon_{x,t}$  termine di errore  $\rightarrow$  errori indipendenti ed identicamente distribuiti con distribuzione

$$N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

- Parametri individuati attraverso i vincoli:  $\sum_x \beta_x = 1$  e  $\sum_t \kappa_t = 0$
- I parametri  $\kappa_t$  stimati sono poi modellizzati e proiettati come una serie temporale stocastica utilizzando i modelli ARIMA.

# ESTENSIONE DEL MODELLO LEE – CARTER

## BROUHNS ET AL. (2002)

---

- ▶ Il modello LC assume implicitamente che gli errori casuali  $\epsilon_{x,t}$  siano omoschedastici (medesima varianza rispetto all'età)
  - ipotesi poco realistica per età elevate, dove è presente una maggiore variabilità della mortalità a causa dell'esiguo numero di decessi
- ▶ Proposta di Brouhns et al. (2002): tassi centrali di mortalità modellizzati tramite il modello Lee-Carter:  $\ln m_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t$   
con decessi distribuiti come una Poisson:  
$$D_x(t) \sim \text{Poisson}(\text{ETR}_x(t) \cdot m_x(t))$$
- ▶ Rispetto al Lee-Carter originario: introduzione di una variazione casuale del numero di decessi di tipo Poisson al posto del termine di errore additivo  $\epsilon_{x,t}$ . Ipotesi realistica per età elevate.



# OSSERVAZIONI SUL MODELLO LEE-CARTER

---

- ▶ Il modello ha bisogno dei vincoli sui parametri beta e kappa per poter essere calibrato, altrimenti pone problemi di identificabilità dei parametri
- ▶ La normalizzazione dei parametri ottenuta attraverso i vincoli su beta e kappa, comportano che il parametro alfa sia pari alla media del logaritmo dei tassi centrali di mortalità nel tempo
- ▶ Il parametro beta potrebbe essere negativo per alcune età, indicando che la mortalità per quelle età tende ad aumentare, mentre diminuisce ad età differenti

# IL MODELLO CAIRNS-BLAKE-DOWD-1

---

- Analisi empiriche sui dati di mortalità suggeriscono che il logaritmo naturale degli odds,  $\ln q_x(t)/p_x(t)$ , assume una forma lineare rispetto all'età  $x$  per un periodo temporale di  $t$  anni
- Cairns et. Al. (2006) hanno quindi proposto il seguente modello che include 2 fattori temporali:

$$\ln \frac{q_x(t)}{p_x(t)} = \kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]}x \quad \text{Ovvero:} \quad q_x(t) = \frac{\exp(\kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]}x)}{1 + \exp(\kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]}x)}$$

La funzione  $\ln q_x(t)/p_x(t)$  può anche essere scritta come:  $\text{logit } q_x(t)$

- Dove  $\kappa_t^{[1]}$  e  $\kappa_t^{[2]}$  sono due processi stocastici che costituiscono una serie temporale bivariata e governano la proiezione dei tassi di mortalità.

# IL MODELLO CAIRNS-BLAKE-DOWD-1

---

- ▶ Non pone problemi di identificazione dei parametri (no vincoli)
- ▶ In genere  $\kappa_t^{[1]}$  decresce nel tempo così come nel modello Lee-Carter, mostrando come i tassi di mortalità diminuiscono nel tempo per tutte le età
- ▶ Se durante il periodo di osservazione dei dati gli incrementi di mortalità sono più elevati alle età giovanili rispetto alle età anziane, allora  $\kappa_t^{[2]}$  aumenta nel tempo
- ▶ Rispetto al modello di Lee-Carter il modello Cairns-Blake-Dowd-1 (CBD-1) mostra cambiamenti dei tassi di mortalità non perfettamente correlati con le età.

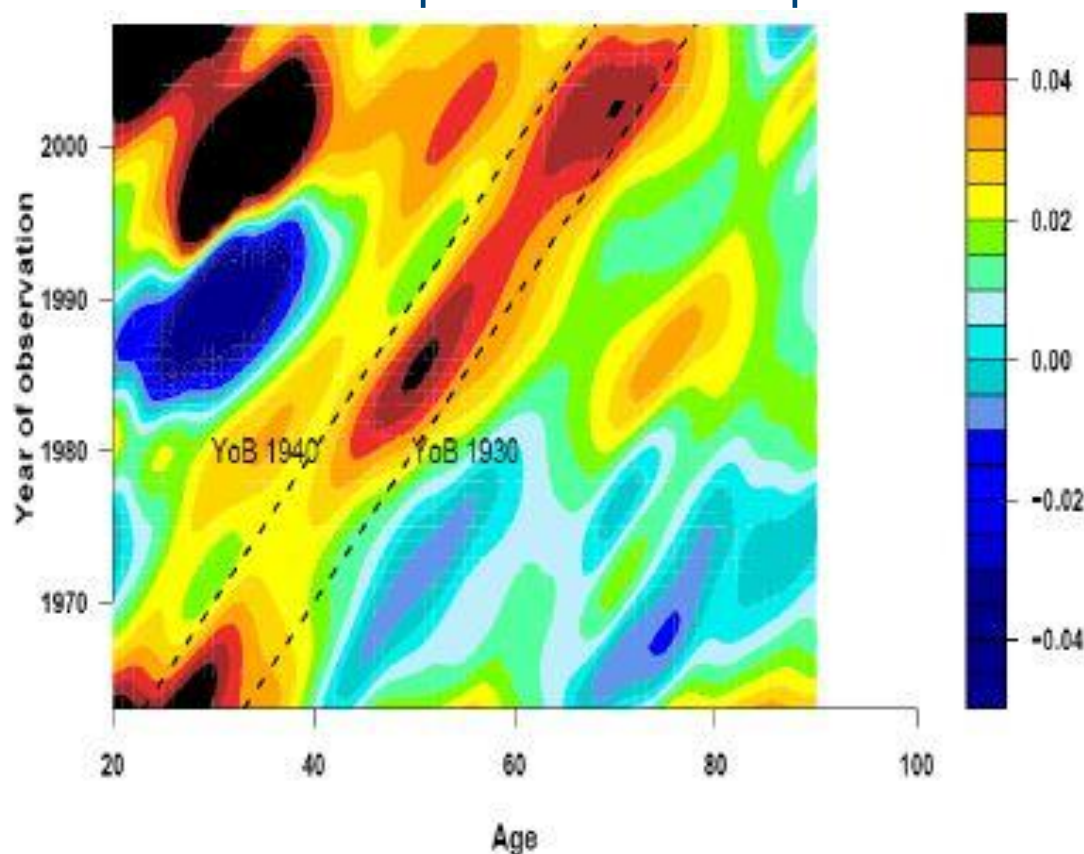
# PROIEZIONE DELLA MORTALITÀ E SERIE TEMPORALI

---

- ▶ Step 1: calibrazione del modello parametrico (Lee-Carter, CBD, ecc.) sulla matrice di dati di mortalità per età e anno di calendario
- ▶ **Step 2** (per i parametri funzione del tempo): utilizzo di un modello per le serie temporali di tipo ARIMA ( $p,d,q$ ) per modellizzare e proiettare i parametri
  - ARIMA: *autoregressive integrated moving average* (modello autoregressivo a media mobile integrato)
    - $p$  = ordine autoregressivo
    - $d$  = ordine di differenziazione
    - $q$  = ordine della media mobile
  - Approccio simulativo che permette di rilevare gli errori generati dalla serie temporale
  - Approccio che permette il calcolo di intervalli di confidenza

# EFFETTO COORTE

- ▶ In alcuni Paesi si osservano tassi di mortalità che sembrano influenzati non solo da età e anno di calendario, ma anche dall'anno di nascita della coorte.
- ▶ Per evidenziare questo effetto si possono analizzare i tassi di incremento annuo della mortalità



$$\frac{q_x(t_{h+1})}{q_x(t_h)} - 1$$

Fonte: Ordine Nazionale degli Attuari (Gruppo di lavoro percettori di rendite) (2012): I percettori di rendite in Italia: analisi della mortalità dal 1980 al 2009 e previsioni al 2040.

# IL MODELLO DI RENSHAW-HABERMAN (2006)

---

- Il logaritmo della forza di mortalità (o del tasso centrale di mortalità) è modellizzato come:

$$\ln \mu_x(t) = \alpha_x + \beta_x^{(0)} i_{t-x} + \beta_x^{(1)} \kappa_t$$

- Rappresenta una versione age-period-cohort (APC) del modello Lee-Carter
  - $i_{t-x}$  : parametro che rappresenta l'effetto coorte (t-x=anno di nascita)
  - $\beta_x^{(0)}$  : descrive per ogni età come la mortalità reagisce al variare dell'effetto coorte
  - $\beta_x^{(1)}$  : descrive per ogni età come la mortalità reagisce al variare del parametro temporale
- Parametri individuati attraverso i vincoli:

$$\sum_x \beta_x^{(0)} = 1, \quad \sum_x \beta_x^{(1)} = 1 \quad \sum_t i_{t-x} = 0, \quad \sum_t \kappa_t = 0$$

# I CRITERI DI SCELTA DEL MODELLO DI PROIEZIONE DELLA MORTALITÀ

---

- ▶ Cairns et al. (2008) suggeriscono i criteri per scegliere tra i vari modelli di proiezione della mortalità:
  - Tassi di mortalità positivi
  - Modello coerente con i dati storici
  - Dinamiche future a lungo termine del modello biologicamente ragionevoli
  - Stime dei parametri robuste rispetto al periodo di dati e intervalli di età impiegati
  - Previsioni del modello robuste rispetto al periodo di dati e intervalli di età impiegati
  - Livelli di previsione dell'incertezza e traiettorie centrali plausibili e coerenti con le tendenze storiche e la variabilità dei dati di mortalità
  - Modello semplice da attuare mediante metodi analitici o veloci algoritmi numerici
  - Modello relativamente parsimonioso
  - Modello utilizzabile per generare percorsi campione e calcolare intervalli di previsione
  - Modello che consente di integrare l'incertezza del parametro nelle simulazioni
  - Almeno per alcuni Paesi, modello che incorpora un effetto stocastico di coorte



# SCELTA DEL PERIODO DI CALIBRAZIONE DEL MODELLO

---

- ▶ La maggior parte degli studi attuariali basano la calibrazione dei modelli di proiezione della mortalità su statistiche relative al periodo 1950-ad oggi. Tale periodo rappresenta meglio l'aspettativa per il futuro rispetto ad un periodo più lungo: 1900-ad oggi.
- ▶ La mortalità diminuisce per tutte le età in maniera più forte nel periodo 1950–2000 rispetto al periodo 1900–2000.
- ▶ La qualità dei dati di mortalità, in particolare per le età elevate, è discutibile nel periodo 1900–1950
- ▶ Le cause di morte sono differenti per i due periodi, prima e dopo il 1950 (prima le malattie infettive, dopo le malattie cardio-circolatorie e i tumori).



# CRITERI QUANTITATIVI

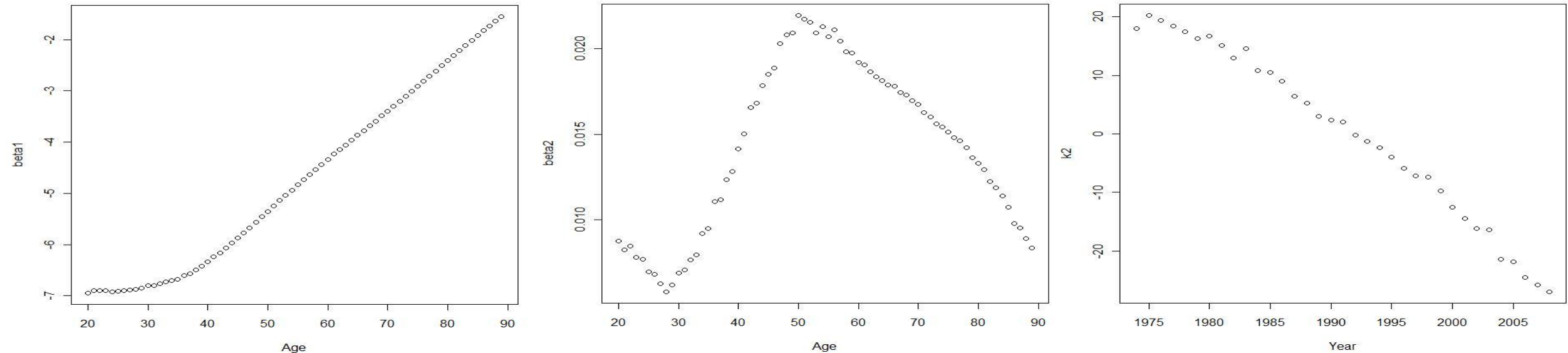
---

- ▶ Diagnostica del modello in base ai residui
  - Plot del residui del modello (solitamente standardizzati)
  
- ▶ Dinamica del modello in base ai parametri temporali
  - Scelta del modello ARIMA (ACF, PACF)
  - Stima dei parametri
  - Diagnostica del modello in base ai residui
  
- ▶ Indicatori di bontà del fitting del modello
  - Bayes Information Criterion (BIC)
  - Akaike Information Criterion (AIC)

# MODELLO LEE-CARTER: APPLICAZIONE ALLA POPOLAZIONE ITALIANA

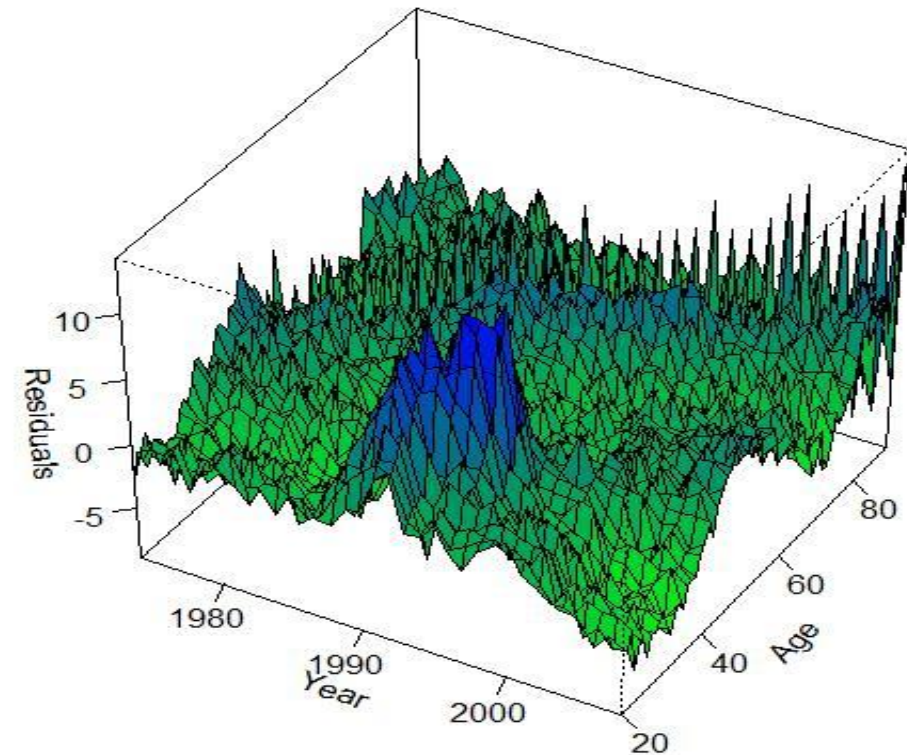
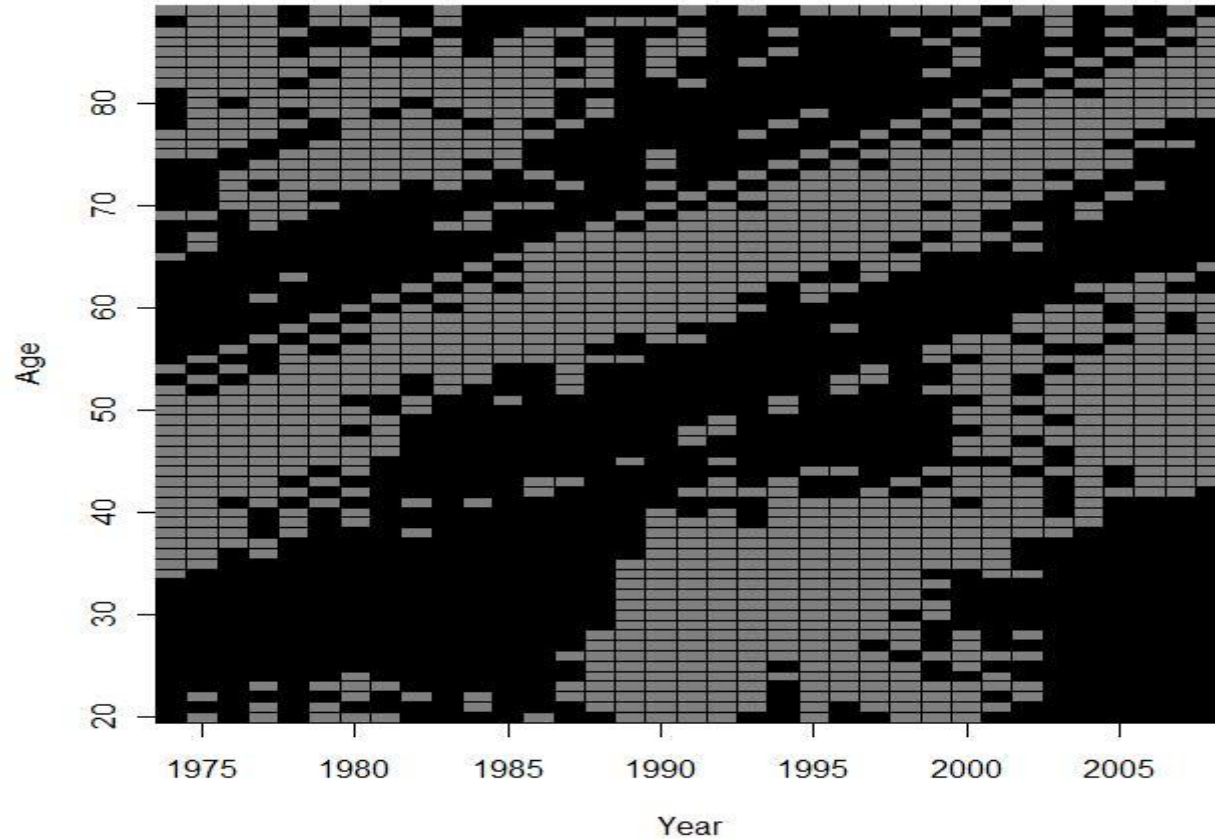
► Popolazione italiana maschile di età 20-89 negli anni di calendario 1974-2008

- Decessi
- Esposti al rischio



*Parametri stimati del modello Lee-Carter*

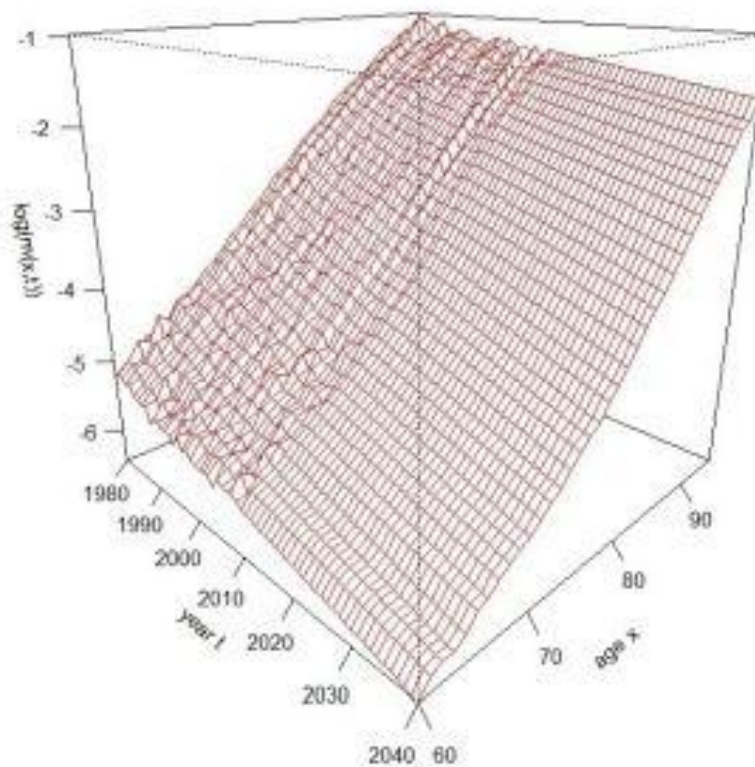
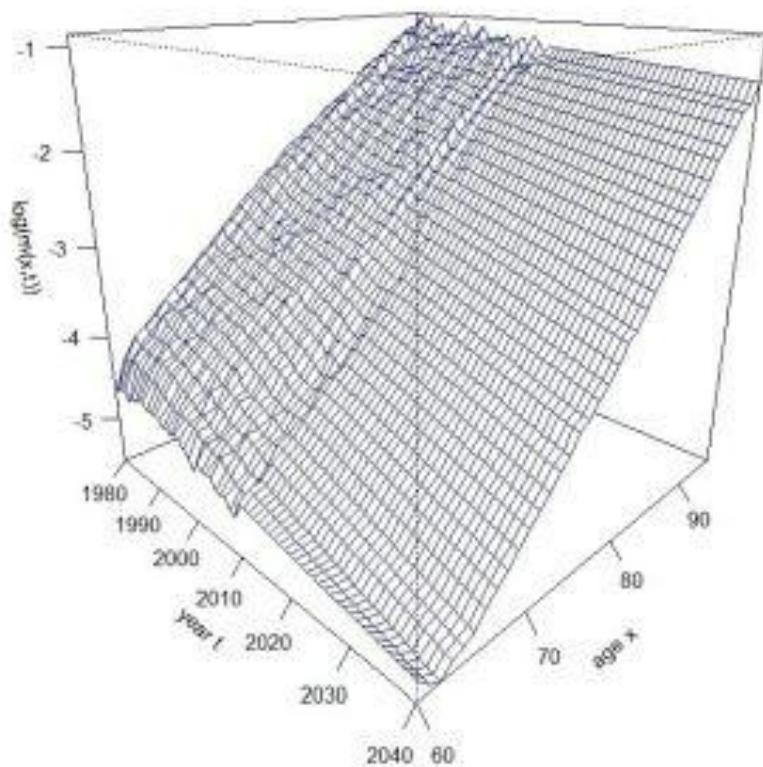
# RESIDUI DEL MODELLO LEE-CARTER



# TASSI CENTRALI DI MORTALITÀ STORICI MODELLIZZATI E PROBABILITÀ DI MORTE PROIETTATE

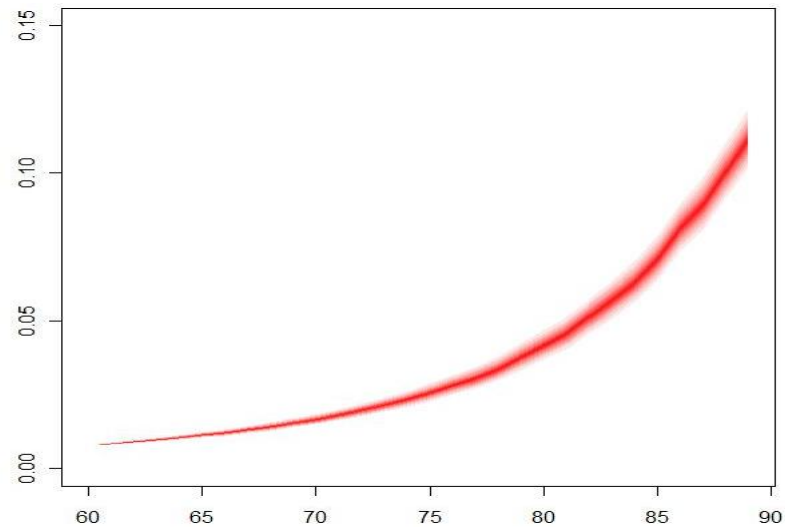
LOGARITMO NATURALE DEI TASSI DI MORTALITÀ PROIETTATI CON IL MODELLO LC (SCENARIO CENTRALE) – DIP. PRIVATI

Età 60-95, 1980-2040, maschi (grafico di sinistra), femmine (grafico di destra)

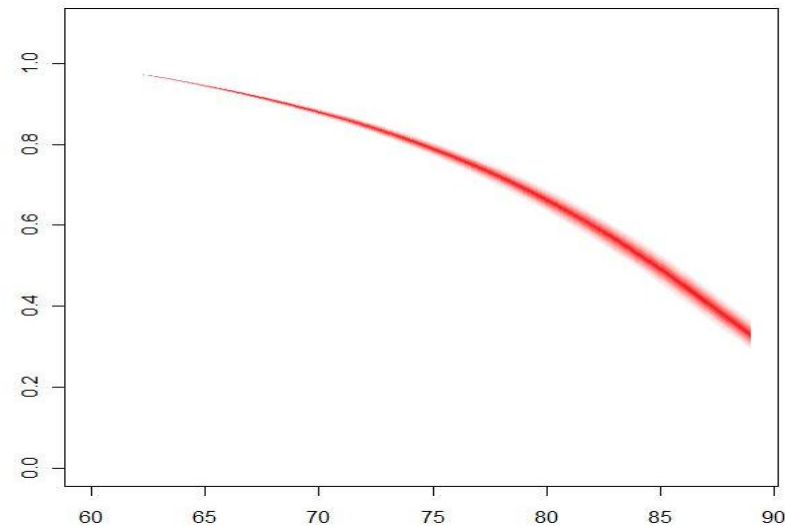


Fonte: Ordine Nazionale degli Attuari (Gruppo di lavoro percettori di rendite) (2012): I percettori di rendite in Italia: analisi della mortalità dal 1980 al 2009 e previsioni al 2040.

# PROIEZIONI DELLA MORTALITÀ

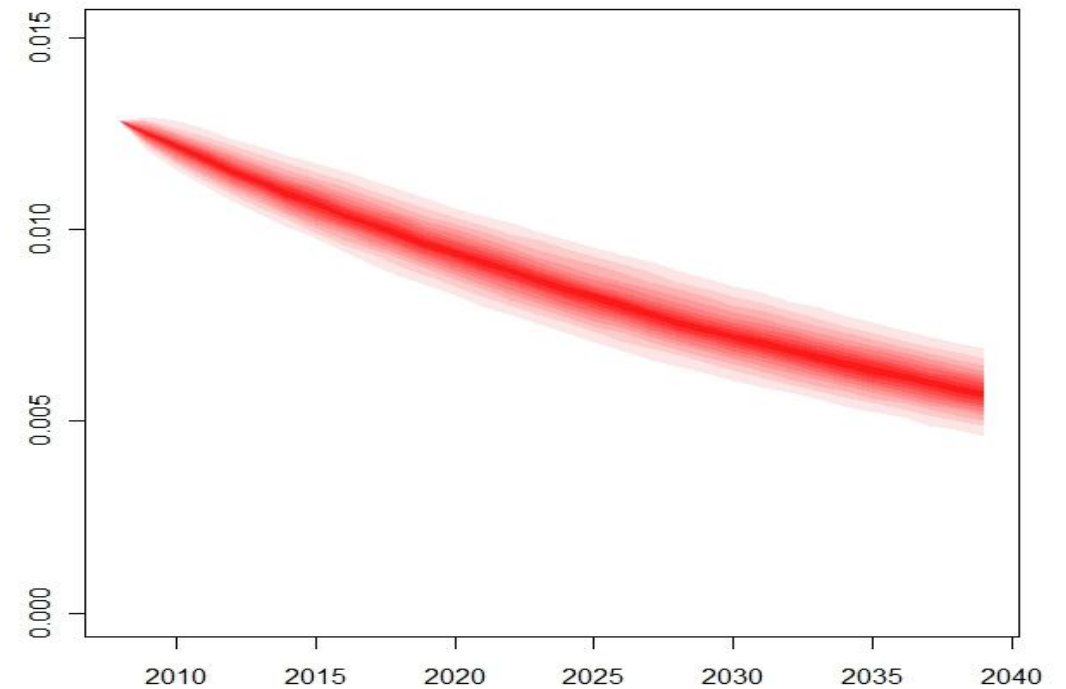


$q_x$  annuali



${}_t p_x$

$q_x(t)$  per la coorte nata nel 1943  
(65 anni nel 2008)





# MISURARE IL LONGEVITY RISK

---

Individuazione di grandezze che rappresentino lo stato di “salute” o di “sofferenza” dei soggetti erogatori di rendite

- Funzione di perdita

Scelta di un'adeguata “misura di rischio”

- Varianza
- Coefficiente di variazione
- Quantili, VaR, TVaR
- Probabilità di rovina

Definizione di un orizzonte temporale di analisi e delle modalità di indagine

- Annuale, pluriennale,....
- Alla scadenza, su tutto l'intervallo temporale

# MISURARE IL LONGEVITY RISK: APPROCCIO DETERMINISTICO

- ▶ Portafoglio composto da una coorte di contratti di rendita immediata a premio unico
- ▶ Valore attuale aleatorio al tempo 0 delle prestazioni

$$\begin{array}{ll}
 \text{j-mo assicurato} & Y^{(j)} = R\ddot{a}_x \\
 \text{Portafoglio di } N_0 \text{ contratti} & Y^{(\Pi)} = \sum_{j=1}^{N_0} Y^{(j)}
 \end{array}$$

- ▶ Valore atteso e varianza

$H$  : scenario di mortalità ipotizzato

$$\begin{array}{ll}
 \text{j-mo assicurato} & \begin{aligned} E(Y^{(j)}|H) &= RE(\ddot{a}_x|H) \\ \sigma^2(Y^{(j)}|H) &= R^2 \sigma^2(\ddot{a}_x|H) \end{aligned} \\
 \text{Portafoglio di } N_0 \text{ contratti} & \begin{aligned} E(Y^{(\Pi)}|H) &= N_0 E(Y^{(j)}|H) \\ \sigma^2(Y^{(\Pi)}|H) &= N_0 \sigma^2(Y^{(j)}|H) \end{aligned}
 \end{array}$$

- ▶ Coefficiente di variazione

$$\begin{aligned}
 CV(Y^{(\Pi)}|H) &= \frac{\sqrt{\sigma^2(Y^{(\Pi)}|H)}}{E(Y^{(\Pi)}|H)} = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \frac{\sqrt{\sigma^2(Y^{(j)}|H)}}{E(Y^{(j)}|H)} \\
 \lim_{N_0 \rightarrow 0} CV(Y^{(\Pi)}|H) &= 0
 \end{aligned}$$

# MISURARE IL LONGEVITY RISK: APPROCCIO STOCASTICO

## ► Valore atteso e varianza

*j-mo assicurato*

$$E(Y^{(j)}) = E_p \left[ E(Y^{(j)} | \tilde{H}) \right]$$

$$\sigma^2(Y^{(j)}) = \underbrace{E_p \left[ \sigma^2(Y^{(j)} | \tilde{H}) \right]}_{\text{Fluttuazioni casuali intorno al valore atteso}} + \underbrace{\sigma^2_p \left[ E(Y^{(j)} | \tilde{H}) \right]}_{\text{Deviazioni sistematiche dei valori osservati da quelli attesi}}$$

*Fluttuazioni casuali  
intorno al valore atteso*

*Deviazioni sistematiche  
dei valori osservati da  
quelli attesi*

## ► Coefficiente di variazione

$$CV(Y^{(\Pi)}) = \frac{\sqrt{\sigma^2(Y^{(\Pi)})}}{E(Y^{(\Pi)})} = \sqrt{\frac{1}{N_0} \frac{E_p \left[ \sigma^2(Y^{(\Pi)} | \tilde{H}) \right]}{E^2(Y^{(j)})} + \frac{\sigma^2_p \left[ E(Y^{(\Pi)} | \tilde{H}) \right]}{E^2(Y^{(j)})}}$$

$$\lim_{N_0 \rightarrow 0} CV(Y^{(\Pi)} | \tilde{H}) = \sqrt{\frac{\sigma^2_p \left[ E(Y^{(\Pi)} | \tilde{H}) \right]}{E^2(Y^{(j)})}}$$

Misura la parte del rischio di mortalità che non è rimovibile semplicemente aumentando la grandezza del portafoglio (parte sistematica del rischio)

$\tilde{H}$  : insieme degli scenari di mortalità ipotizzati

*Portafoglio di  $N_0$  contratti*

$$E(Y^{(\Pi)}) = E_p \left( Y^{(\Pi)} | \tilde{H} \right) = N_0 E(Y^{(j)})$$

$$\sigma^2(Y^{(\Pi)}) = E_p \left[ \sigma^2(Y^{(\Pi)} | \tilde{H}) \right] + \sigma^2_p \left[ E(Y^{(\Pi)} | \tilde{H}) \right]$$



# MISURARE IL LONGEVITY RISK: APPROCCIO STOCASTICO

---

## ► Il Value at Risk della riserva matematica

$$V_t^{VaR} = VaR_{99.5\%}(V_t) \quad \alpha=99.5\%$$



Percentile della riserva matematica calcolata all'epoca  $t$  ( $V_t$ ) con un livello di confidenza pari a  $99.5\%=\alpha$

## ► Il Tail VaR (o Expected Shortfall) della riserva matematica

- Strumento utile per valutare la severità delle perdite che superino il VaR ad un fissato livello di confidenza

$$V_t^{TVaR} = TVaR_{99.5\%}(V_t) \quad \alpha=99.5\%$$



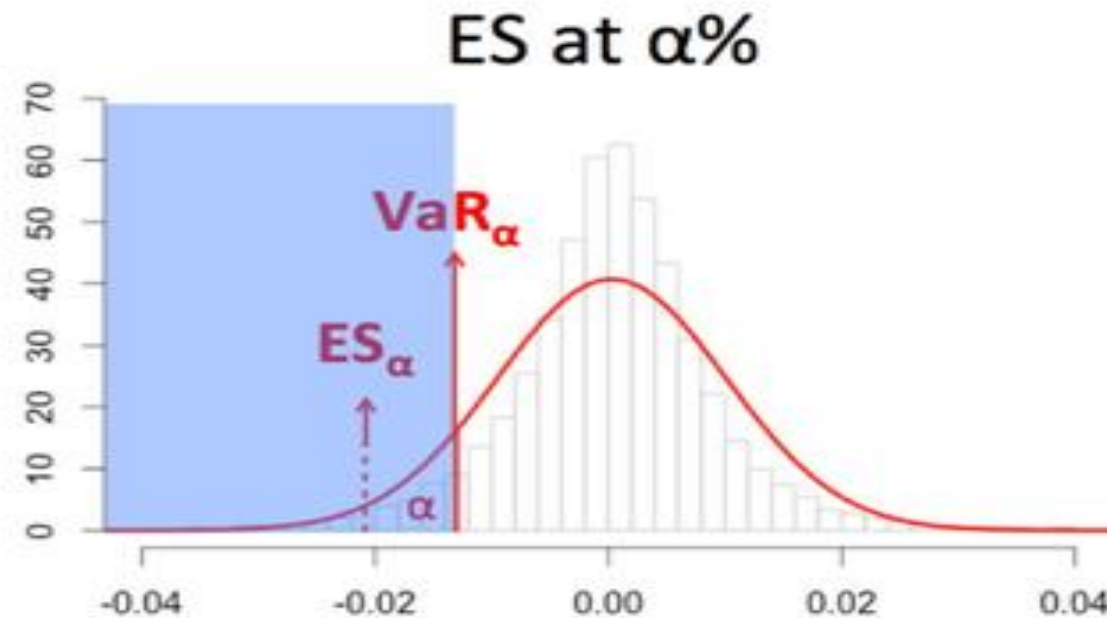
Media dei valori dei VaR della riserva matematica all'epoca  $t$  che risultano superiori ad un fissato livello di confidenza (99.5%)

# VAR E TAIL VAR (O EXPECTED SHORTFALL (ES))

$$ES_{\alpha} = E[L | L \geq VaR_{\alpha}]$$



$L$  = generica distribuzione delle perdite



# TARIFFAZIONE

---

- ▶ Connesso ai benefici ed alle garanzie (esplicite o implicite)
- ▶ Necessità di tavole di mortalità proiettate
- ▶ Necessità di fattori di selezione
- ▶ Margine di rischio
  - Implicito nell'uso di basi tecniche conservative o esplicito con espressioni matematiche
  - E' espressamente necessario quando il tasso di rendita è garantito

# COSTRUZIONE DEL PRODOTTO: L'ESPERIENZA ITALIANA

---

- ▶ Tipo di prestazioni: rendita vitalizia, rendita certa (5,10 anni) + rendita vitalizia,...
- ▶ Prestazioni aggiuntive: rendita di sopravvivenza, pensione maggiorata (LTC), ...
- ▶ Il longevity risk è concentrato durante il periodo di erogazione della rendita → Reg n. 21/2008 dell'ISVAP: il tasso di rendita deve essere stabilito 3 anni prima del pensionamento (prima può essere cambiato). Ad oggi non ci sono casi di GAR (guaranteed annuity rate).

# L'USO DELLE TAVOLE PROIETTATE IN ITALIA

---

L' ANIA pubblica periodicamente nuove tavole di mortalità proiettate per i percettori di rendita

► **1998: “RG48”**

- Basata su un metodo di estrapolazione applicato alla popolazione generale, adottando lo scenario pessimistico (Ragioneria Generale dello Stato – 1996). La coorte di riferimento è quella delle persone nate nel 1948. Le altre coorti sono ottenute attraverso una correzione per età (age-shifting) specifica di coorte.
- I fattori di selezione sono stati presi dall'esperienza inglese del 1980 (Pensioners Lives, PML80 per gli uomini e PFL80 per le donne, si veda il “*Continuous Mortality Investigation Report n°10*” pubblicato dall'*Institute of Actuaries* e la *Faculty of Actuaries* nel 1990).

► **2005: “IPS55”**

- Basata su un'estensione del modello Lee-Carter applicato alla popolazione generale dall'ISTAT (ISTAT, 2002), adottando lo scenario centrale. La coorte di riferimento è quella delle persone nate nel 1955. Le altre coorti sono ottenute attraverso un age-shifting specifico di coorte.
- I fattori di selezione sono stati presi dall'esperienza inglese del 1992 (Pensioners Lives, PML92 per gli uomini e PFL92 per le donne, ma anche Immediate Annuitants, IML92 per gli uomini e IML92 per le donne, si veda il “*Continuous Mortality Investigation Report n°17*” pubblicato dall'*Institute of Actuaries* e la *Faculty of Actuaries* nel 1999).

# L'USO DELLE TAVOLE PROIETTATE IN ITALIA

---

## ► 2012: “A62”

- Basata su un'estensione del modello Lee-Carter applicato alla popolazione generale dall'ISTAT (ISTAT, 2010), adottando lo scenario centrale. La coorte di riferimento è quella delle persone nate nel 1962. Le altre coorti sono ottenute attraverso un age-shifting specifico di coorte.
- I fattori di selezione sono stati presi dall'esperienza inglese del 2000 (Pensioners Lives, PNMA00 per gli uomini e PNFA00 per le donne, ma anche Immediate Annuitants, IML00 per gli uomini e IFL00 per le donne).

# LO STUDIO SUI PERCETTORI DI RENDITA IN ITALIA

---

## ► 2011-2012

- Basato su dati di mortalità dei percettori di rendita di diversi Enti previdenziali (INPS, Ex INPDAP, Ex ENPALS, ENPAM, Cassa Forense) e di imprese di assicurazione relativi al periodo 1980-2009.
- La mortalità è stata stimata e poi proiettata sulla base del modello Lee-Carter con e senza effetto coorte (Renshaw-Haberman), 2 varianti del modello di Cairns-Blake e Dowd sono state testate.
- I fattori di selezione sono stati ricavati rapportando la mortalità delle popolazioni specifiche a quella della popolazione generale italiana. Non sono stati proiettati.

## ► 2014-in corso

# I SURVIVOR SWAPS

---

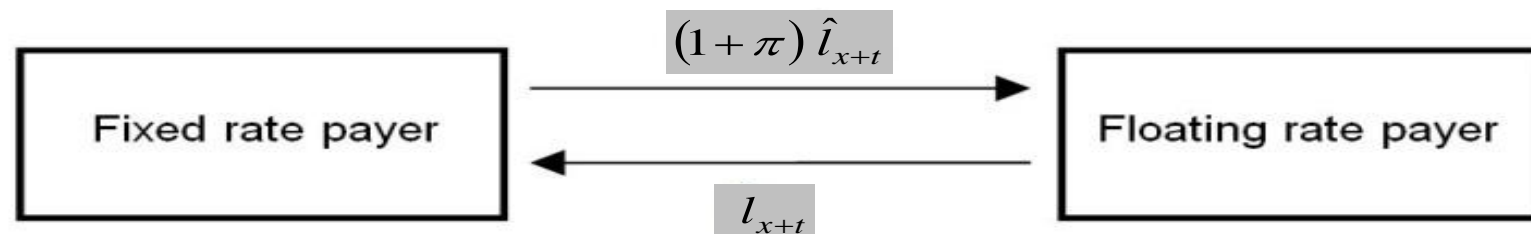
- ▶ Survivor swap (basic): accordo tra due controparti per scambiare in futuro un flusso di cassa fisso in cambio di un singolo flusso di cassa casuale dipendente dalla mortalità (Dowd et al. 2006)
  - I cash-flows sono collegati al numero di sopravvivenenti di una data coorte
  - Confrontato con altre mortality-linked securities – p.e. longevity bonds – i survivor swaps :
    - Comportano costi di transazione più bassi
    - Sono più flessibili e tagliati su misura per venire incontro alle varie esigenze
    - Non richiedono l'esistenza di un mercato liquido
- ▶ Vanilla survivor swaps (insieme di basic survivor swaps): le controparti si accordano per scambiarsi una serie di pagamenti periodici (per ogni  $t = 1, 2, \dots, S$ ) fino alla scadenza dello swap  $S$ 
  - Fixed leg dipende dai sopravvivenenti attesi di una data coorte
  - Floating leg dipende dai sopravvivenenti effettivi alle scadenze future



# LA STRUTTURA DI UN VANILLA SURVIVOR SWAP

- ▶ L'erogatore di rendita deve pagare rendite immediate ad una coorte di  $l_x$  percettori di età  $x$  al tempo zero
  - Rendita fissa di importo 1€
  - $\hat{l}_{x+t}$  : numero atteso di sopravviventi all'età  $x+t$  al tempo  $t$
  - $l_{x+t}$  : numero effettivo di sopravviventi all'età  $x+t$  al tempo  $t$
- ▶ Esposizione al rischio sistematico di deviazioni tra  $l_{x+t}$  e  $\hat{l}_{x+t}$
- ▶  $l_{x+t} - \hat{l}_{x+t}$  : perdite subite dall'erogatore della rendita ad ogni scadenza  $t$
- ▶  $\pi$  : aliquota di premio fisso dello swap fissata in modo che il valore dello swap sia zero all'emissione → valore di mercato del fixed leg = valore di mercato del floating leg

Flussi di cassa del  
survivor swap



# IL PRICING DI UN VANILLA SURVIVOR SWAP

- Il valore del vanilla survivor swap al tempo zero per il fixed-rate payer è:

$$\underbrace{V[l_{x+t}]}_{\text{Prezzo di mercato del floating leg in } t=0} - \underbrace{V[(1 + \pi)\hat{l}_{x+t}]}_{\text{Prezzo di mercato del fixed leg in } t=0}$$

- Ipotizzando l'indipendenza tra tassi d'interesse e mortalità:

$$V[(1 + \pi)\hat{l}_{x+t}] = (1 + \pi) \sum_{t=1}^T \hat{l}_{x+t} d(0, t)$$

Valore attuale atteso del fixed leg sotto la misura di probabilità del mondo reale

$$V[l_{x+t}] = \sum_{t=1}^T E^*(l_{x+t}) d(0, t)$$

Valore attuale atteso del floating leg sotto la misura di probabilità risk-adjusted

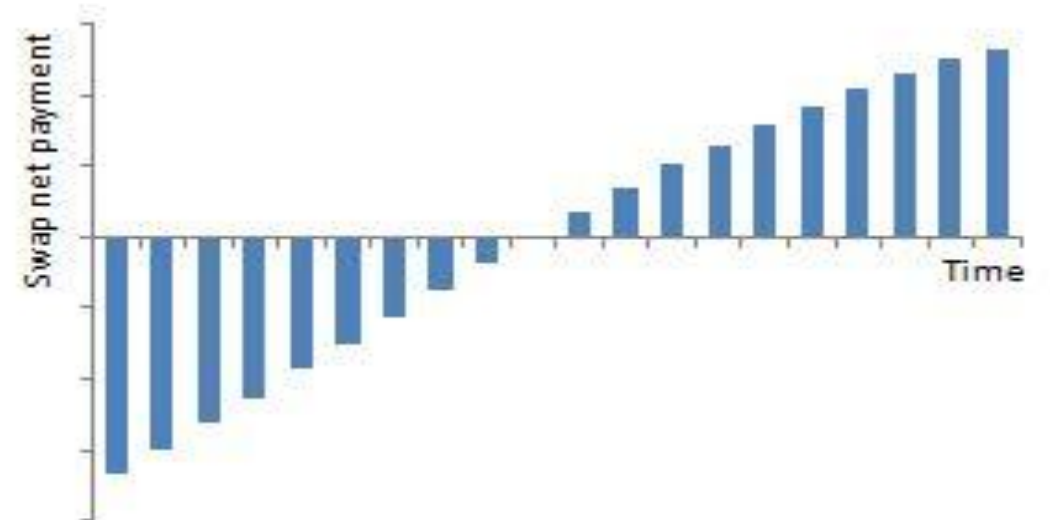
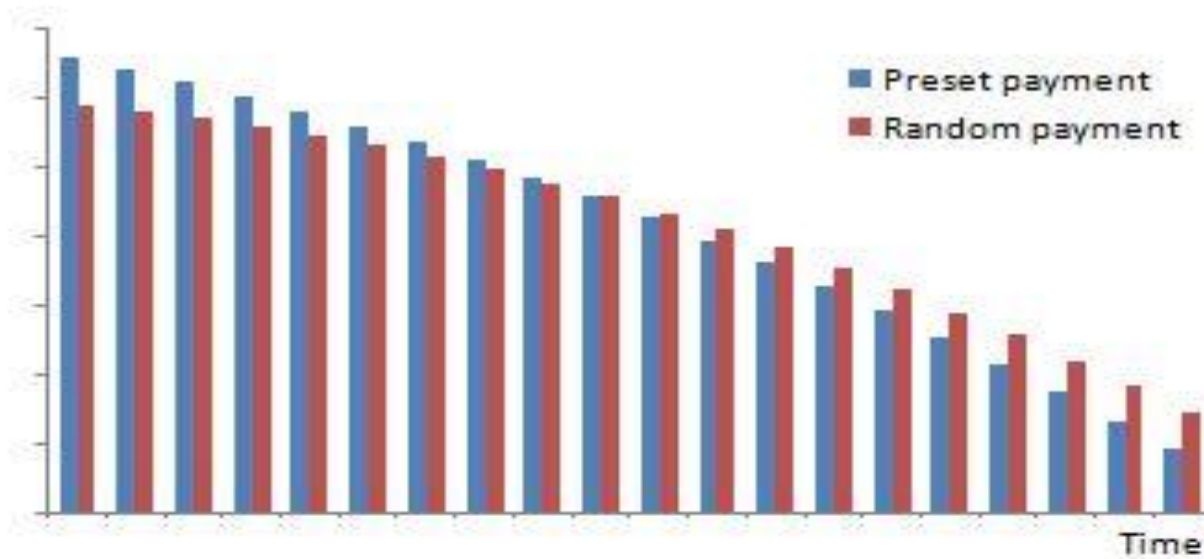
$d(0, t)$  : fattore di sconto risk-free

Premio del vanilla  
survivor  
Swap



$$\pi = \frac{\sum_{t=1}^T E^*(l_{x+t}) d(0, t)}{\sum_{t=1}^T \hat{l}_{x+t} d(0, t)} - 1$$

# RAPPRESENTAZIONE DEL FLUSSO DI PAGAMENTI DI UN VANILLA SURVIVOR SWAP



# ALCUNE EMISSIONI DI SURVIVOR SWAPS

---

Date	Hedger	Term (years)	Intermediary
Jan-08	Lucida	10	JPMorgan
Jul-08	Canada Life	40	JPMorgan
Feb-09	Abbey Life	Run-off	Deutsche Bank
Mar-09	Aviva	10	RBS
Jun-09	Babcock	50	Credit Suisse
Jul-09	Royal & Sun Alliance	Run-off	Goldman Sachs

*Fonte: Biffis & Blake (2009), "Mortality-Linked Securities and Derivatives"*

# COPERTURE STANDARDIZZATE VS PERSONALIZZATE

	<i>Vantaggi</i>	<i>Svantaggi</i>
<i>Coperture Standardizzate</i>	<p>Più economiche rispetto alle coperture personalizzate</p> <p>Più bassi costi di set-up e operativi</p> <p>Scadenza più breve, quindi minore esposizione al credito della controparte</p>	<p>Coperture non perfette:</p> <p>Rischio di base</p> <p>Roll risk</p>
<i>Coperture Personalizzate</i>	<p>Coperture perfette, assenza di rischio di base residuo</p> <p>Set-and-forget hedge, richiede un minimo di monitoraggio</p>	<p>Più costose delle standardizzate</p> <p>Più alti costi di setup e operativi</p> <p>Poca liquidità</p> <p>Scadenza più lunga, quindi maggiore esposizione al credito della controparte</p> <p>Meno attraenti per gli investitori</p>

Fonte: Coughlan (2007)

# BIBLIOGRAFIA

---

- ▶ Brouhns, N., Denuit, M. and Vermunt, J. K. (2002). A Poisson Log-Bilinear Approach to the Construction of Projected Life Tables. *Insurance: Mathematics and Economics* 31: 373-393.
- ▶ Cairns, A.J.G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G.D., Epstein, D., Ong, A., Balevich, I. (2007). A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England & Wales and the United States. *North American Actuarial Journal* 13: 1-35.
- ▶ Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., (2008). Modelling and management of Mortality Risk: a review. *Scandinavian Actuarial Journal* 2-3: 79-113.
- ▶ Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., Khalaf-Allah, M. (2011): Mortality density forecasts: An analysis of six stochastic mortality models, *Insurance: Mathematics and Economics*, 48, 355–367.
- ▶ Coughlan et al. (2007). LifeMetrics: A toolkit for measuring and managing longevity and mortality risk . Technical Document. JP Morgan, London.
- ▶ Currie I. D., Durban, M. and Eilers, P. H. C. (2004) Smoothing and forecasting mortality rates *Statistical Modelling*, 4, 279-298.
- ▶ Dowd, K., Cairns, A. J. G., Blake, D., Coughlan, G. D., Epstein, D., Khalaf-Allah, M. (2010): Evaluating the goodness of fit of stochastic mortality models, *Insurance: Mathematics and Economics*, 47: 255–265.
- ▶ Dowd, K., Cairns, A. J. G., Blake, D., Coughlan, G. D., Epstein, D., Khalaf-Allah, M. (2010): Backtesting stochastic mortality models: An ex-post evaluation of multi-period-ahead density forecasts, *North American Actuarial Journal*, 14: 281–298.

# BIBLIOGRAFIA

---

- ▶ HMD. (2010). Human Mortality Database, University of California, Berkeley (USA) and Max Planck Institute for Demographic Research, Rostock (Germany).
- ▶ Lee, R.D., Carter, L.R. (1992). Modelling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association* 87: 659-675.
- ▶ Olivieri A., Pitacco E. (2006) “Life annuities and longevity dynamics”. Working Paper n. 36, CERAP.
- ▶ Ordine Nazionale degli Attuari (Gruppo di lavoro percettori di rendite) (2012): I percettori di rendite in Italia: analisi della mortalità dal 1980 al 2009 e previsioni al 2040.
- ▶ Pitacco E., Denuit M., Haberman S., Olivieri A. (2009) “Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business”. Oxford University Press.
- ▶ Renshaw, A.E., Haberman, S. (2003). On the forecasting of mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics* 32: 379-401.
- ▶ Renshaw, A.E., Haberman, S. (2006). A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics* 38: 556–570.